

Dev n° 34

Ref: Garet et Kurtzman "De l'intégration aux probabilités"

Exo 251 p 314 + p 556 + p 191

Site: Florian Dussap

Titre: Formule de Stirling par le TCLDéf: (p 191)Soient  $a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ . On a la loi gamma:  $\Gamma(a, \lambda)$  qui suit la loi de densité:  

$$f_{a, \lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$$
Notons  $\Gamma(1, \lambda) \sim E(\lambda)$ 

Notre but est:

Prop: (p 314)

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Pour ce faire on a besoin de ce lemme:

Lemme: (Attention pas dans le livre)Soient  $X$  et  $Y$  v.a. indé. avec  $X \sim \Gamma(a, \lambda)$  et  $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$ .Alors,  $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$ .Démon: (Lemme)\* Calcul loi de  $X+Y$ : $X$  et  $Y$  sont indé. donc la loi de  $X+Y$  est  $f_{a, \lambda} * f_{b, \lambda}$ .Par  $x \leq 0$  on a  $f_{a, \lambda} * f_{b, \lambda} = 0$  et par  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} (f_{a, \lambda} * f_{b, \lambda})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} (x-t)^{a-1} e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{1}_{x-t>0} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0} dt \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x} \int_0^1 (x-xu)^{a-1} (xu)^{b-1} x du \quad \left. \begin{array}{l} t=xu \\ dt=x du \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{changement de} \\ \text{variable} \\ \text{ponctuelle} \end{array} \\ &= \underbrace{\left( \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du \right)}_{=: C} x^{a+b-1} e^{-\lambda x} \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \beta(a, b) x^{a+b-1} e^{-\lambda x} = f_{a+b, \lambda}(x) \end{aligned}$$

Donc,  $(f_{a, \lambda} * f_{b, \lambda})(x) = C x^{a+b-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$ .Comme c'est une densité de proba, on a  $C = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}$  (par comparaison avec la loi  $\Gamma$ )Donc,  $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$   $\square$ Remarque:On a:  $\dots$

### Remarque:

On a :

$$c = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{a-1} u^{b-1} du}_{= \beta(a,b)} = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\beta(a,b).$$

### Démo: (Prop) (p 251)

#### \* Application TCL: (q.2)

Soient  $(X_i)_{i \geq 0}$  v.a. indé. de loi  $E(1)$  et  $S_n = X_0 + \dots + X_n$ .

D'après le lemme  $S_n \sim \Gamma(n+1, 1)$ .

D'après le TCL :

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(0,1)$$

#### \* Application Slutsky: (q.2)

$$\text{Posons } Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

On a :

$$Y_n = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 1} \left( \underbrace{\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(0,1)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(0,1) \quad (*)$$

#### \* Calcul loi $Y_n$ : (pas comme ça dans le livre - q.3)

Soit  $f$  fct m. bornée. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y_n)] &\stackrel{\text{T.T.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{(n+y\sqrt{n})^n}{n!} e^{-n-y\sqrt{n}} \mathbb{1}_{\{y > -\sqrt{n}\}} \sqrt{n} dy \quad \left. \begin{array}{l} \text{changement de} \\ \text{variable affine} \end{array} \right\} y = \frac{x-n}{\sqrt{n}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \underbrace{\frac{n^{n+1/2}}{n!} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n-y\sqrt{n}} \mathbb{1}_{\{y > -\sqrt{n}\}}}_{:= g_n(y) = a_n h_n(y)} dy \end{aligned}$$

avec :

$$a_n := \frac{\sqrt{2\pi}}{n!} n^{n+1/2} e^{-n} \quad \text{et} \quad h_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} \mathbb{1}_{\{y > -\sqrt{n}\}}$$

#### \* Simplification $h_n(y)$ : (q.5)

On a :

$$\begin{aligned} h_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n \log(1 + y/\sqrt{n})} e^{-y\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n \left( \frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} e^{-y\sqrt{n}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{DL} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2 + o(1)} \quad (*) \end{aligned}$$

\* Conclusion: (q.e.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{On a } \int_0^1 g_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \quad \text{par (*)} \\ \text{De plus par } h_n: \int_0^1 h_n(y) dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(\text{c}) + \text{cv dominée}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Donc :

$$n! \underset{+0}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$$

## Annexe:

### \* TCL:

**Théorème :** Soit  $(X_n)$  une suite de variables indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On pose :

$$\mu = E(X_1), \sigma^2 = \text{Var}(X_1)$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Alors la suite  $(Y_n)$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0,1)$  (la loi normale centrée réduite). En d'autres termes, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(Y_n \leq x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

### Démon:

#### Développement limité des variables centrées réduites [\[ modifier | modifier le code \]](#)

Pour une variable aléatoire  $Y$  d'espérance 0 et de variance 1. Comme  $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sa fonction caractéristique est de classe  $C^2$  et par propriété de la fonction caractéristique  $\varphi_Y^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[Y^k]$ <sup>8</sup>

donc on a  $\varphi_Y'(0) = i\mathbb{E}[Y] = 0$  et  $\varphi_Y''(0) = -\mathbb{E}[Y^2] = -\text{Var}(Y) = -1$ .

Ainsi,  $\varphi_Y$  admet un **développement limité** au voisinage de 0 de la forme  $\varphi_Y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0$

Or, si on prend les  $Y_i$  comme les variables centrées réduites des  $X_1, X_2, \dots, X_n$  c'est-à-dire :  $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ , on a simplement :

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}.$$

Soit ( $t \in \mathbb{R}$ ), et pour tout ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), comme  $(X_1, \dots, X_n)$  sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, on a :<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}[\exp(itZ_n)] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} Y_i\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} Y_i\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

#### Convergence et identification [modifier | modifier le code]

Donc la fonction caractéristique de  $Z_n$  est  $\left[\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \rightarrow e^{-t^2/2}$  lorsque

$n \rightarrow \infty$ .

Mais cette limite est la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ , d'où l'on déduit le théorème central limite grâce au [théorème de convergence de Lévy](#), qui affirme que la [convergence simple](#) des fonctions caractéristiques implique la [convergence en loi](#).

#### \* Slutsky:

**Théorème :** Soit  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une variable aléatoire et  $c \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  et que  $(Y_n)$  converge en probabilité vers  $c$ . Alors  $(X_n, Y_n)$  converge en loi vers  $(X, c)$ .

#### \* DL $\log(1+x)$ :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

#### \* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et } \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Démo:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_0^{+\infty} t^k \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}$$

$$\text{Donc en particulier } \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

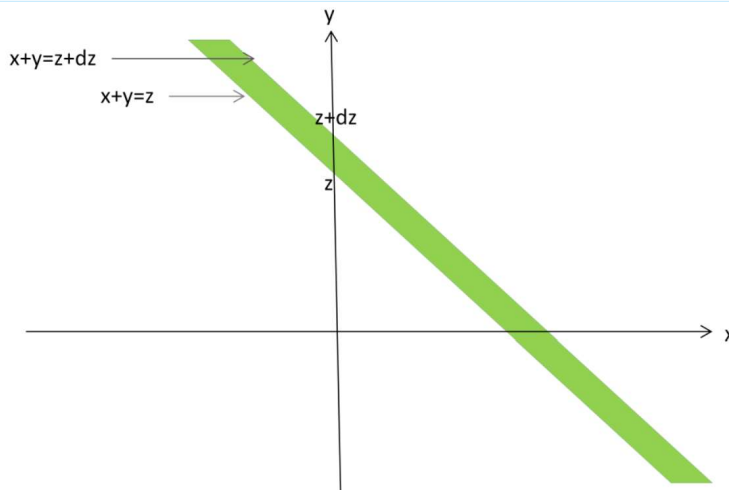
$$\text{Donc, } \text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

#### \* $X+Y$ a comme densité $f_{X+Y}$ par $X$ et $Y$ indé :

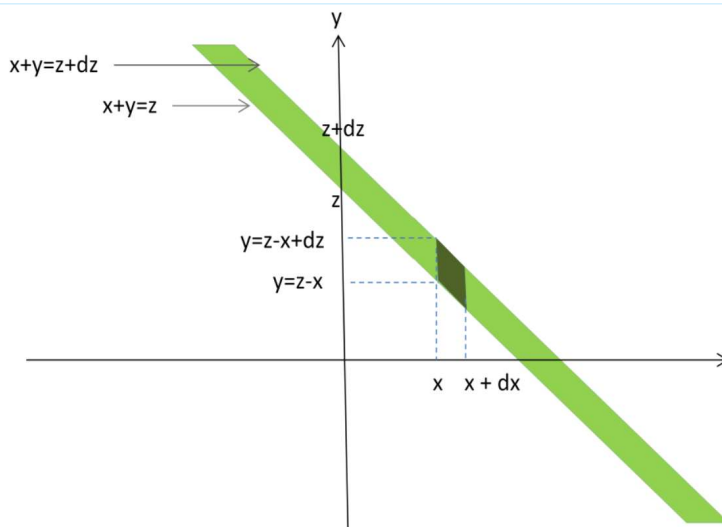
Soit  $Z = X + Y$  la variable aléatoire somme des deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  de densité conjointe définie précédemment. Déterminons la densité  $f_Z$  de  $Z$  en s'aidant d'une visualisation tridimensionnelle. Nous avons pour tout réel  $z$  :

$$f_Z(z)dz = P(z \leq Z < z + dz) = P(z \leq X + Y < z + dz)$$

$f_Z(z)dz$  est donc l'intégrale de la fonction de densité conjointe sur le domaine compris entre les droites d'équation  $x + y = z$  et  $x + y = z + dz$ . Ce domaine est figuré en vert sur le dessin ci-dessous.

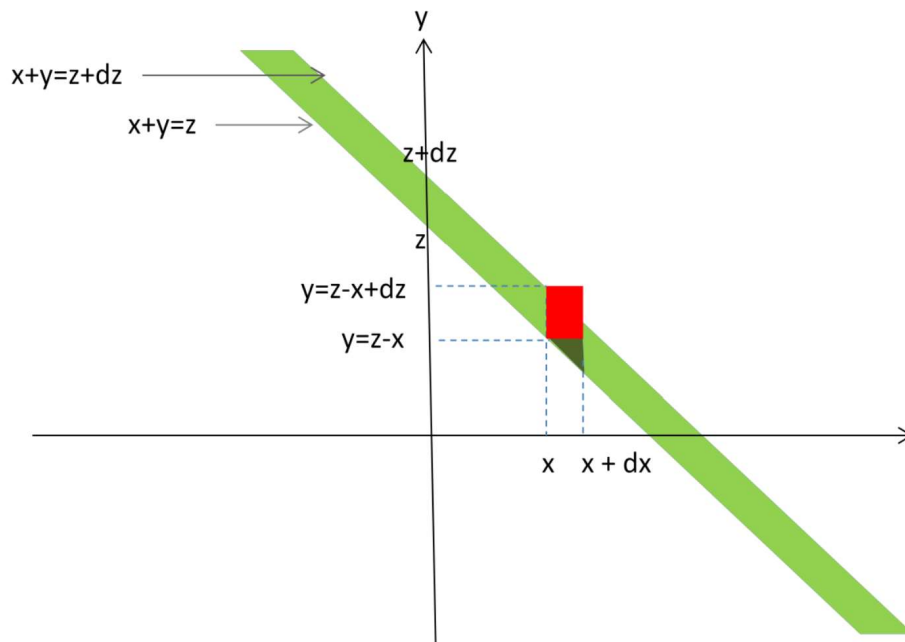


Considérons alors la portion de ce domaine située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (parallélogramme en vert plus foncé sur la figure).



Puisque  $dx$  et  $dz$  sont des infiniments petits, nous pouvons considérer  $f(x,y)$  comme localement constante autour du point  $M(x; z-x)$  pour le calcul de l'intégrale.

L'intégrale de  $f$  sur le parallélogramme vert foncé est alors la même que celle sur le rectangle de même aire figuré en rouge.



Or ce rectangle correspond à l'évènement :

$$E = (x \leq X < x + dx) \cap (z - x \leq Y < z - x + dz)$$

Et la probabilité (infiniment petite également) de cet évènement est:

$$\begin{aligned} dP(E) &= P(x \leq X < x + dx) P(z - x \leq Y < z - x + dz) \\ &= f_X(x) dx f_Y(z - x) dz \end{aligned}$$

Nous avons donc en intégrant tout ces petits rectangles :

$$f_Z(z)dz = \iint_D f(x; y)dx dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dP(E)$$

Soit :

$$f_Z(z)dz = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx dz$$

Finalement, en sortant  $dz$  de l'intégrale et en simplifiant :

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

## En résumé:

Un autre endroit où l'on rencontre fréquemment les convolutions est la théorie des probabilités et le théorème central limite. Soit deux variables aléatoires continues  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes de densité  $f(x)$  et  $g(x)$ . Cela veut dire que la probabilité pour qu'une réalisation de  $X_1$  "tombe" entre  $x$  et  $x + dx$  est égale à  $f(x)dx$  :  $\Pr(x < X_1 < x + dx) = f(x)dx$ . Nous nous demandons maintenant si nous pouvons déterminer la densité de probabilité  $h(z)$  de la variable  $Z = X_1 + X_2$ .

$$\begin{aligned} h(z)dz &= \Pr(z < X_1 + X_2 < z + dz) \\ &= \int_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} \Pr(z - x_1 < X_2 < z - x_1 + dz) \Pr(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1) \\ &= dz \int_{-\infty}^{+\infty} g(z - x_1) f(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

Nous voyons donc que  $h(z) = (f * g)(z)$ .

\* Exercice colle:

- m.g. cv  $L^p \Rightarrow$  cv  $IP$  propa et donner tous les liens de cv.  
 → Soit  $X_1, X_2, X_3, X_4$  v.a.d. iid avec  $IP(X_i=1)=IP(X_i=-1)=\frac{1}{2}$ .

Donner  $E[\det(M)^2]$  avec  $M = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$

$$\det M^2 = X_1^2 X_2^2 - 2 X_2 X_3 X_1 X_4 + X_3^2 X_4^2$$

$$E[\det(M)^2] \stackrel{\substack{\text{lin.} \\ \text{ind.} \\ \text{m. fac}}}{=} 2E[X_1^2]^2 - 2E[X_1]^4$$

$$E[X_1] = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad E[X_1^2] \stackrel{\text{T.T.}}{=} (1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Donc, } E[\det(M)^2] = 2 \times 1 - 2 \times 0 = 2.$$

- Soit  $X$  v.a.r. qui admet un moment d'ordre 2 et 4.

$$\text{On s.g. } E[X] = 0 \text{ et } E[X^2] > 0.$$

$$\text{M.g. } IP(X > 0) > 0 \text{ et } IP(X < 0) > 0.$$

$$\text{Par l'absurde s.g. } IP(X > 0) = 0 \text{ et } E[X] = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ p.s.}$$

$$\text{Or } E[X^2] > 0 \text{ ABSURDE.}$$

De même pour  $IP(X < 0) > 0$  □

$$\text{M.t.n s.g. } E[X^2] = a \text{ et } E[X^4] = b < +\infty.$$

$$\text{M.g. } IP(|X| > 0) \geq \frac{a^2}{b}$$

$$\text{On a } E[X^2] = E[X^2 \mathbb{1}_{|X|>0}] \leq E[X^2]^{1/2} IP(|X|>0)^{1/2}$$

$$\Rightarrow a^2 \leq b IP(|X|>0)$$

$$\Rightarrow IP(|X|>0) \geq \frac{a^2}{b} \quad \square$$

Prop:  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$

Rappel:

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+*$ , la loi  $\Gamma(a, \lambda)$  a comme densité:

$$f_{a,\lambda}(x) = \mathbb{1}_{x>0} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$$

R.q:  $\Gamma(1, \lambda) \sim E(\lambda)$

Lemme:

$X$  et  $Y$  indé avec  $X \sim \Gamma(a, \lambda)$  et  $Y \sim \Gamma(b, \lambda)$  ( $a, b, \lambda \in \mathbb{R}^+*$ )  
Alors,  $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$

Démo: (Lemme)

\* Calcul de la loi  $X+Y$ :

$X$  et  $Y$  indé donc de densité  $f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda}$ .

$\rightarrow x < 0$ : on a  $f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda}(x) = 0$

$\rightarrow x \geq 0$ : on a:

$$f_{a,\lambda} * f_{b,\lambda}(x) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-t)^{a-1} t^{b-1} dt \quad \text{ch. de var. lin.}$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x} \int_0^1 (x-xu)^{a-1} (xu)^{b-1} x du$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \beta(a, b) e^{-\lambda x} x^{a+b-1}$$

$$= f_{a+b,\lambda}(x).$$

Donc  $X+Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$   $\square$

Démo: (Prop)

\* Application TCL:

$(X_n)_{n \geq 0}$  v.a.r iid de loi  $E(1)$ .

Par le lemme:  $S_n = X_0 + \dots + X_n \sim \Gamma(n+1, 1)$

On a:

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

\* Application Slutsky:

Posons  $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ .

On a:

$$Y_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \left( \underbrace{\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}}}_{\substack{\text{loi} \\ n \rightarrow +\infty \rightarrow \mathcal{N}(0,1)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\substack{\text{IP} \\ n \rightarrow +\infty \rightarrow 0}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) (*)$$

\* Calcul de  $Y_n$ :

Soit  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ .

$$\mathbb{E}[f(Y_n)] \stackrel{\text{ch. de var. affine}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{n!} e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{(n+y\sqrt{n})^n}{n!} e^{-n-y\sqrt{n}} \mathbb{1}_{y \geq -\sqrt{n}} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \underbrace{\frac{n^{n+1/2}}{n!} e^{-n\sqrt{2\pi}}}_{=: a_n} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \underbrace{\frac{e^{-y\sqrt{n}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\{y \geq -\sqrt{n}\}}}_{=: h_n(y)} dy$$

et  $g_n(y) = a_n h_n(y)$ .

\* Simplification  $h_n$ :

Avec un dl à l'ordre 2 on obtient:

$$h_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2} + o(1)\right)$$

\* Conclusion:

$$\text{On a par } (*) \quad \int_{\mathbb{R}} g_n(y) dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$$\text{et } \int_{\mathbb{R}} h_n(y) dy \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$$\text{Donc } a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \square$$